Ολοκλήρωμα Riemann

Ορισμός: Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό διάστημα. Διαμέριση του $[a,b]$ ονομάζουμε ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $[a,b]$ που περιλαμβάνει τα δύο άκρα $P = \{\underset{a}{x_0} < x_1 < x_2 < \dots < \underset{b}{x_n}\}$

(β) Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$, ονομάζουμε πλάτος της P: $\|P\| = \max\{x_{i+1} - x_i,\ i = 0,1,\dots,n-1\}$

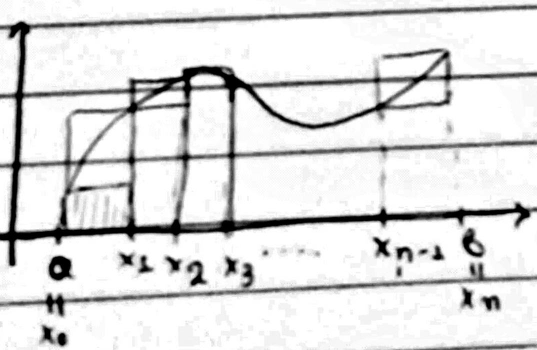
$= \max\{x_i - x_{i-1},\ i = 1,\dots,n\}$

$= \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$

(γ) Αν P, P' δύο διαμερίσεις του $[a,b]$ θα λέμε ότι η P' είναι εκλέπτυνση της P αν $P \subseteq P'$ (δηλαδή η P' προκύπτει από την P με προσθήκη κάποιων πεπερασμένων το πλήθος σημείων).

δ) Αν P_1, P_2 είναι δύο διαμερίσεις του $[a,b]$ και θέσουμε $P = P_1 \cup P_2$ τότε η P είναι διαμέριση του $[a,b]$ που περιέχει τις P_1, P_2 (και μάλιστα είναι η μικρότερη διαμέριση του $[a,b]$ με αυτή την ιδιότητα.)

• Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$



Για κάθε $k = 1, \dots, n$ θέτουμε

$m_k (= m_k(f,P)) = \inf\{f(t),\ t \in [x_{k-1}, x_k]\}$

$M_k (= M_k(f,P)) = \sup\{f(t),\ t \in [x_{k-1}, x_k]\}$

Οι παραπάνω αριθμοί ορίζονται καλά εφόσον η f είναι φραγμένη, για κάθε $k = 1, \dots, n$ το σύνολο $\{f(t),\ t \in [x_{k-1}, x_k]\}$ είναι μη κενό και φραγμένο, άρα έχει supremum και infimum.

Για f, P m_k, M_k, $k=1,\dots,n$ όπως παραπάνω, θέτουμε:

$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$ → άνω άθροισμα της f ως προς την P

$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$ → κάτω άθροισμα της f ως προς την P

Εφόσον $m_k \leq M_k$ για $k=1,\dots,n$ και $x_k - x_{k-1} > 0$ $\forall k$

$L(f,P) \leq U(f,P)$

Το $L(f,P)$ είναι μια κάτω προσέγγιση για το «εμβαδόν» που μας ενδιαφέρει, ενώ το $U(f,P)$ είναι μια άνω προσέγγιση αυτού.

<u>ΛΗΜΜΑ</u>: Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$ και $x_{k-1} < y < x_k$ για κάποιο $k \in \{1,\dots,n\}$

Θέτουμε $P' = P \cup \{y\} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < y < x_k < \dots < x_n = b\}$

Τότε $L(f,P) \leq L(f,P') \leq U(f,P') \leq U(f,P')$

<u>Απόδειξη</u>

Η μεσαία ανισότητα ισχύει από τα προηγούμενα.

Έστω $m_i = \inf\{f(t),\ t \in [x_{i-1}, x_i]\}$, για $i=1,\dots,n$

$M_i = \sup\{f(t),\ t \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Θέτουμε $m_k' = \inf\{f(t),\ t \in [x_{k-1}, y]\}$

$m_k'' = \inf\{f(t),\ t \in [y, x_k]\}$

$M_k' = \sup\{f(t),\ t \in [x_{k-1}, y]\}$

$M_k'' = \sup\{f(t),\ t \in [y, x_k]\}$

Τότε: $m_k \leq m_k'$
$m_k \leq m_k''$
$M_k' \leq M_k$
$M_k'' \leq M_k$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι αν $A \subseteq B$ τότε $\inf B \leq \inf A$ και $\sup A \leq \sup B$

Έτσι $L(f,P') = m_1(x_1-x_0)+\dots+m_k'(y-x_{k-1})+m_k''(x_k-y)+\dots+m_n(x_n-x_{n-1})$

$\geq m_1(x_1-x_0)+\dots+m_k(y-x_{k-1})+m_k(x_k-y)+\dots+m_n(x_n-x_{n-1})$

$= m_1(x_1-x_0)+\dots+m_k(x_k-x_{k-1})+\dots+m_n(x_n-x_{n-1}) =$

$= L(f,P)$

$U(f,P') = M_1(x_1-x_0)+\dots+M_k'(y-x_{k-1})+M_k''(x_k-y)+\dots+M_n(x_n-x_{n-1})$

$\leq M_1(x_1-x_0)+\dots+M_k(y-x_{k-1})+M_k(x_k-y)+\dots+M_n(x_n-x_{n-1})$

$= M_1(x_1-x_0)+\dots+M_k(x_k-x_{k-1})+\dots+M_n(x_n-x_{n-1})$

$= U(f,P)$

Πρόταση: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και P_1,P_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Τότε $L(f,P_1)\leq U(f,P_2)$

Απόδειξη:

Θεωρούμε την $P=P_1\cup P_2$ (την κοινή εκλέπτυνση των P_1,P_2)

Η P προκύπτει από την P_1 με προσθήκη πεπερασμένου το πλήθος σημείων.

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα, τόσες φορές όσες και τα νέα σημεία, προκύπτει ότι $L(f,P_1)\leq L(f,P)$

Ομοίως, πάλι από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι

$U(f,P_1)\leq U(f,P_2)$

Εφόσον $L(f,P)\leq U(f,P)$ συμπεραίνουμε ότι

$L(f,P_1)\leq L(f,P)\leq U(f,P)\leq U(f,P_2)$

(*) Υπενθύμιση: Αν $A,B\subseteq\mathbb{R}$ ώστε $a\leq b$ για κάθε $a\in A$ και $b\in B$

τότε $\sup A\leq\inf B$.

Ορισμός: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Ορίζουμε κάτω ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$: $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{L(f,P)$, P διαμέριση του $[a,b]\}$

Ορίζουμε άνω ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$:

$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{U(f,Q)$, Q διαμέριση του $[a,b]\}$

Εφόσον $L(f,P) \leq U(f,Q)$ για οποιεσδήποτε διαμερίσεις P, Q του $[a,b]$, προκύπτει ότι: $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$

Ορισμός: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση.
Η f λέγεται Riemann ολοκληρώσιμη αν $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$
Στην περίπτωση αυτή, η κοινή τιμή του άνω και κάτω ολοκληρώματος της f στο $[a,b]$ θα λέγεται ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$.
Θα συμβολίζεται $\int_a^b f(x)dx$ ή $\int_a^b f$.

Θεώρημα (Κριτήριο Riemann): Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη.
Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη ανν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε: $U(f,P)-L(f,P)<\epsilon$.
Απόδειξη:
$(\Rightarrow)$ Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη
$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$
Έστω $\epsilon>0$.
Εφόσον $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{L(f,Q),\ Q \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$
$(\exists P_1)$ διαμέριση του $[a,b]$ ώστε: $\int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} < L(f,P_1)$
Επίσης εφόσον:
$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{U(f,Q)\ Q \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$
θα $(\exists P_2)$ διαμέριση του $[a,b]$ ώστε: $U(f,P_2) < \int_a^b f(x)\,dx + \epsilon/2$
Θέτουμε $P_1 \cup P_2 = P$
$U(f,P)-\frac{\epsilon}{2} \leq U(f,P_2)-\frac{\epsilon}{2} < \int_a^b f(x)dx < L(f,P_1)+\epsilon/2 \leq L(f,P)+\epsilon/2$

$\Rightarrow U(f,P)-L(f,P)<\epsilon$

(⇐) Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $\forall \epsilon > 0$ $\exists P$ διαμέριση του $[a,b]$

ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$

Για να δ.ο. $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$

Αρκεί ν.δ.ο. $\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$

Θέτω $\epsilon > 0$.

Από υπόθεση $\exists P$ διαμέριση του $[a,b]$ ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \le U(f,P) < L(f,P) + \epsilon \le \underline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon$$

Άρα $\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon$

Εφόσον αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$ συμπεραίνουμε ότι

$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$.

Επομένως η f είναι ολοκληρώσιμη.